

## **CAPÍTULO II**

### **BASES TEÓRICAS**

#### **2.1 Sistemas vibratorios**

Se entiende por sistema vibratorio todo aquel que posee un movimiento oscilatorio que puede o no ser armónico y que tiene la capacidad de almacenar y transformar energía cinética y potencial.

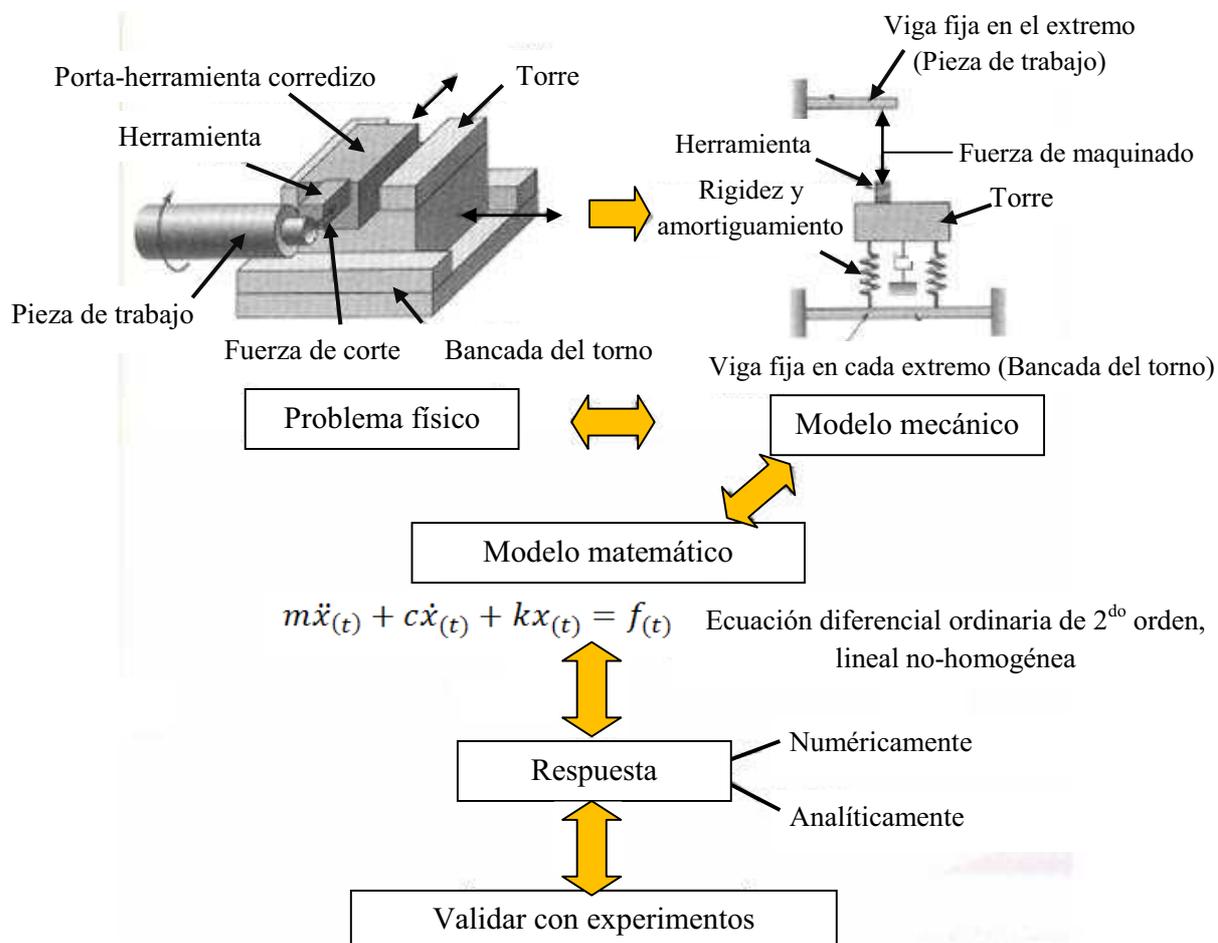
#### **2.2 Tipos de vibración**

- *Vibraciones libres:*
  - Respuesta a condiciones iniciales (impulsos).
- *Vibraciones forzadas:*
  - Respuesta armónica a una excitación periódica.
  - Respuesta transitoria.
- *Vibraciones auto excitadas:*
  - Respuesta transitoria a una excitación interna debido en general a inestabilidades.

#### **2.3 Construcción de modelos**

Una vez que un problema físico ha sido identificado, se comienza por desarrollar el modelo mecánico del mismo. Mediante la ayuda de las leyes de Newton o las ecuaciones de Lagrange, se obtiene el modelo matemático que corresponde al modelo mecánico. Con las herramientas matemáticas apropiadas, se halla la solución matemática al problema planteado y por ende se consigue la respuesta del sistema propuesto en el modelo mecánico, que corresponde a la ley de movimiento.

Un ejemplo de lo anterior se presenta en la Figura 2.1:



**Figura 2.1** Sistema para torneado una pieza, modelos vibratorios y pasos para resolución del sistema.

**Fuente:** «Vibraciones» por Balakumar Balachandran y Magrab Edward B, 2000 adaptado por los autores.

## 2.4 Movimiento oscilatorio

A continuación se presenta un resumen de la información que se puede obtener de una señal de vibraciones.

La mayoría de los movimientos oscilatorios sencillos pueden representarse mediante el uso de *curvas sinusoidales*.

El *período* de una vibración es el intervalo de tiempo en el cual un movimiento se repite (realiza un ciclo); se designa con el símbolo “**T**” y se mide en segundos.

El recíproco del período es la *frecuencia* de la oscilación; se designa con el símbolo "f" y se mide en Hertz (Hz). Se expresa como:

$$f = \frac{1}{T} \quad (2.1)$$

La *frecuencia circular* o *angular* de oscilación se designa con el símbolo "w" y se mide en radianes por segundo. Se expresa por:

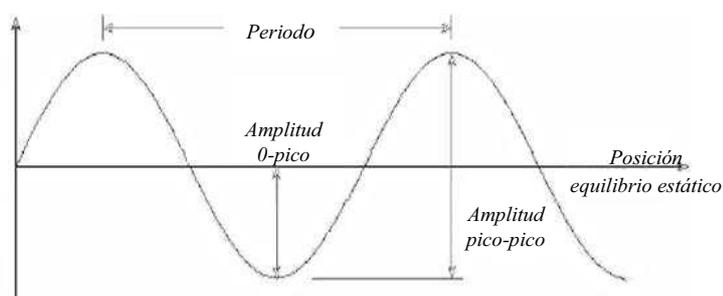
$$w = \frac{2 \cdot \pi}{T} \quad (2.2)$$

La *posición de equilibrio estático* (PEE) de un sistema es la posición en la cual las fuerzas estáticas se equilibran. Si un sistema libre oscila, lo hará alrededor de su posición de equilibrio estático, a la cual regresará una vez que haya disipado toda la energía de perturbación.

La *amplitud cero-pico* mide la amplitud de la función sinusoidal desde la PEE valor 0 en el eje de las ordenadas) y el máximo o el mínimo de la función.

La *amplitud pico-pico* mide la magnitud de la amplitud de la función sinusoidal desde un valor mínimo hasta un valor máximo o viceversa.

Una muestra gráfica de los conceptos anteriormente descritos se encuentra en la Figura 2.2.



**Figura 2.2** Algunos parámetros en una curva que representa el movimiento oscilatorio.

**Fuente:** Guía del curso Teoría de Vibraciones, Lapso 2009-I.

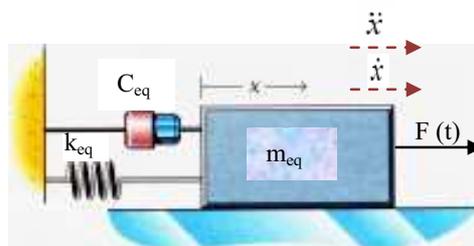
## 2.5 Resonancia

La resonancia es un estado de operación en el que una frecuencia de excitación se encuentra cerca de una frecuencia natural del sistema mecánico, produciéndose en este caso un

incremento progresivo de la amplitud de la vibración que puede llegar a ser peligroso para la integridad del sistema.

## 2.6 Sistemas de 1 GDL

Un sistema mecánico se dice que posee un grado de libertad cuando su configuración geométrica puede ser expresada en cualquier instante en función de una sola variable. El modelo mecánico más simple de un solo GDL, es el masa-resorte-amortiguador identificado mediante sus constantes características equivalentes  $m_{eq}$ ,  $C_{eq}$  y  $k_{eq}$ , como se ilustra en la Figura 2.3, donde  $x$  es el desplazamiento del bloque respecto a la posición de equilibrio y  $F(t)$  representa la acción de una fuerza externa.



**Figura 2.3** Constantes características de un sistema de 1 GDL.  
Fuente: [www.imac.unavarra.es/web\\_imac/.../Practicas\\_1\\_2\\_GDL.doc](http://www.imac.unavarra.es/web_imac/.../Practicas_1_2_GDL.doc)

Resolviendo el sistema ya sea por Newton o por Lagrange se obtiene la siguiente ecuación de movimiento:

$$m_{eq}\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + k_{eq}x = F(t) \quad (2.3)$$

## 2.7. Respuesta libre

La respuesta libre de sistemas de un grado de libertad, ocurre cuando dichos sistemas son capaces de oscilar debido a la acción de fuerzas inherentes a ellos, sin la acción de fuerzas externas sobre estos, así la ecuación 2.3 se iguala a cero.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2.4)$$

Para resolver la ecuación de movimiento emplea la frecuencia natural ( $\omega_n$ ) y el factor de amortiguación ( $\zeta$ ).

### Frecuencia natural ( $\omega_n$ )

Todo cuerpo posee masa y rigidez, en vibraciones es bien conocido que la frecuencia natural de un sistema es la raíz del cociente de la rigidez equivalente y la masa equivalente.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} \quad (2.5)$$

### Factor de amortiguación ( $\zeta$ )

Relaciona las tres constantes características equivalentes del sistema. Se designa con el símbolo  $\zeta$ , y es adimensional.

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2\sqrt{k_{eq}m_{eq}}} \quad (2.6)$$

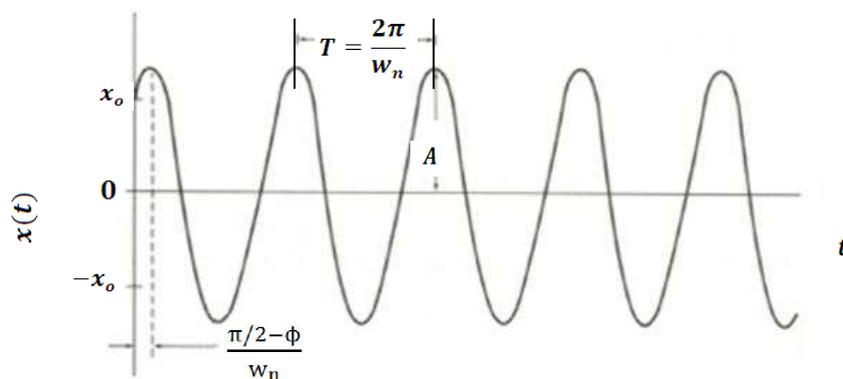
Quedando la ecuación 2.4:

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = 0 \quad (2.7)$$

Así, la ecuación permite identificar cuatro tipos de sistemas de acuerdo a su factor de amortiguación:

### Sistema no amortiguado ( $\zeta = 0$ )

Este sistema es también llamado movimiento armónico simple, Estos sistemas son reducidos a una masa y un resorte (el primero es un almacenador de energía cinética, el segundo de energía potencial). Al no haber elementos disipativos, la respuesta es periódica y perpetua, ver Figura 2.4.

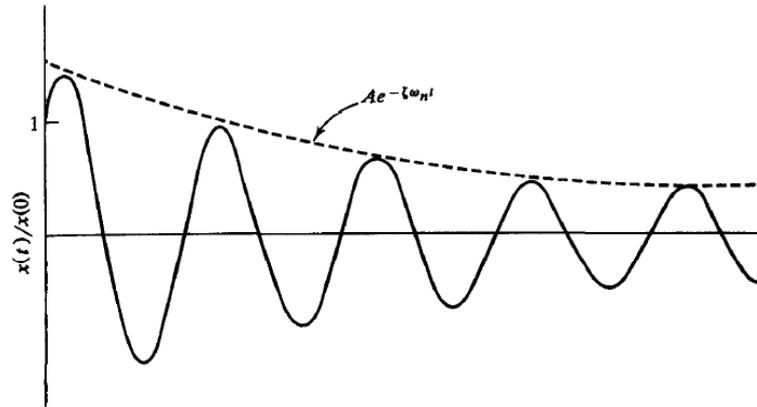


**Figura 2.4** Respuesta libre de un sistema no amortiguado de 1 GDL.

**Fuente:** «Fundamentals of Mechanical Vibrations» por S. Graham Kelly, 2000.

*Sistema sub-amortiguado ( $0 < \zeta < 1$ )*

En este caso se presentará un movimiento oscilatorio armónico alrededor de una posición de equilibrio en el cual la amplitud disminuirá con el tiempo en cada oscilación, Figura 2.5.

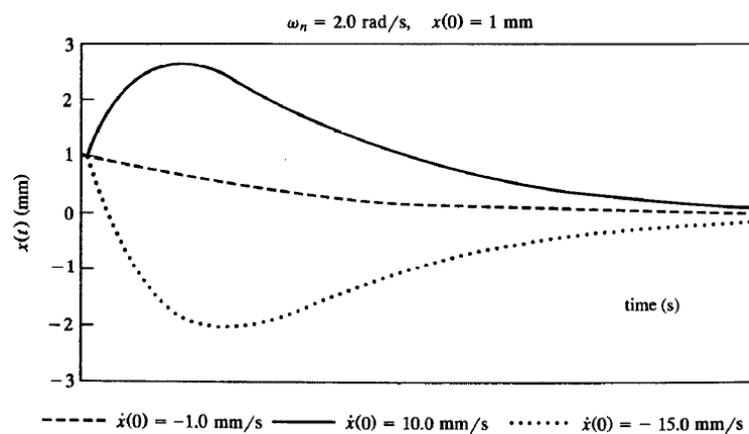


**Figura 2.5** Respuesta libre de un sistema sub-amortiguado de 1 GDL.

**Fuente:** «Fundamentals of Mechanical Vibrations» por S. Graham Kelly, 2000.

*Sistema críticamente amortiguado ( $\zeta = 1$ )*

La condición  $\zeta = 1$  define la cantidad mínima de amortiguamiento necesario para evitar un comportamiento oscilatorio, por lo cual se le llama a este caso críticamente amortiguado, (ver Figura 2.6.)

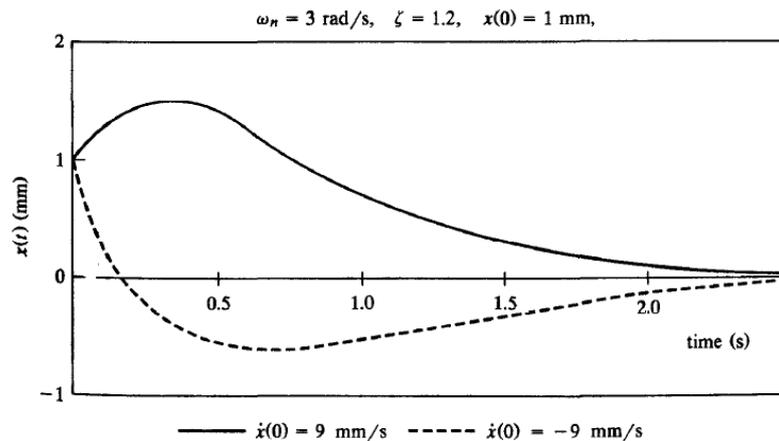


**Figura 2.6** Respuesta libre de un sistema críticamente amortiguado de 1 GDL.

**Fuente:** «Fundamentals of Mechanical Vibrations» por S. Graham Kelly, 2000.

*Sistema sobre-amortiguados ( $\zeta > 1$ )*

Cuando  $\zeta$  es mayor que uno el sistema se acercará a su posición de equilibrio en forma exponencial sin que se presente oscilación alguna y jamás regresará a su posición original (a partir de la cual se produjo el movimiento) como se puede ver en la Figura 2.7. Ejemplos de este tipo de amortiguamiento pueden observarse en los mecanismos que sirven para el cerrado automático de puertas.



**Figura 2.7** Respuesta libre de un sistema sobre-amortiguado de 1 GDL.

**Fuente:** «Fundamentals of Mechanical Vibrations» por S. Graham Kelly, 2000.

En los sistemas sub-amortiguados es muy útil conocer el decremento logarítmico, el cual se designa con el símbolo  $\delta$ . Se define como:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left[ \frac{X_0}{X_n} \right] \quad (2.8)$$

Donde  $n$  es el número de periodos entre  $X_0$  y  $X_n$ .  $\zeta$  se relaciona con el factor de amortiguación de la siguiente manera:

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{2 * \pi}{\delta} \right)^2}} \quad (2.9)$$

### *Frecuencia natural amortiguada ( $\omega_d$ )*

Frecuencia del movimiento armónico que resulta al introducir un desplazamiento y/o una velocidad inicial a un sistema de un grado de libertad amortiguado, que está en posición de equilibrio, y dejarlo vibrar libremente Su valor es:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2.10)$$

## **2.8 Péndulo**

### *Péndulo simple*

Un péndulo simple está constituido por un hilo sin peso e inextensible del que pende un cuerpo pesado, cuya masa está concentrada en su centro de masas.

Para pequeñas amplitudes, su movimiento es armónico simple, cuyo período de oscilación "T" depende solo de la longitud del péndulo y de la aceleración de la gravedad, cumpliéndose que:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (2.11)$$

### *Péndulo físico*

Cuando un cuerpo pesado (masas agregadas) no pende de un hilo sin peso, sino de un cuerpo con masa no despreciable (barra de aluminio) se tiene un péndulo físico, por lo cual hay que tener en cuenta la distribución de la masa de la barra de aluminio y el punto donde se encuentren ubicadas las masas, por tanto su período de oscilación viene dado por la expresión.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_e}{g}} \quad (2.12)$$

donde " $L_e$ " es la longitud equivalente del péndulo, cuyo valor es.

$$L_e = \frac{I}{m \cdot R} \quad (2.13)$$

siendo "I" el momento de inercia respecto al eje de suspensión, "m" la masa total del péndulo y "R" la distancia entre el eje de suspensión y el centro de masas del conjunto.

Teniendo en cuenta la geometría del sistema

$$\mathbf{R} = \frac{m_a L_a + \frac{1}{2} m_b L_b}{m_a + m_b} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{I} = m_a L_a^2 + \frac{1}{3} m_b L_b^2 \quad (2.15)$$

siendo " $m_a$ " la masa total de las masas agregadas y el tornillo, " $m_b$ " la masa de la barra de aluminio, " $L_a$ " la distancia del punto de suspensión al centro de las masas agregadas y " $L_b$ " la longitud total de la barra de aluminio.

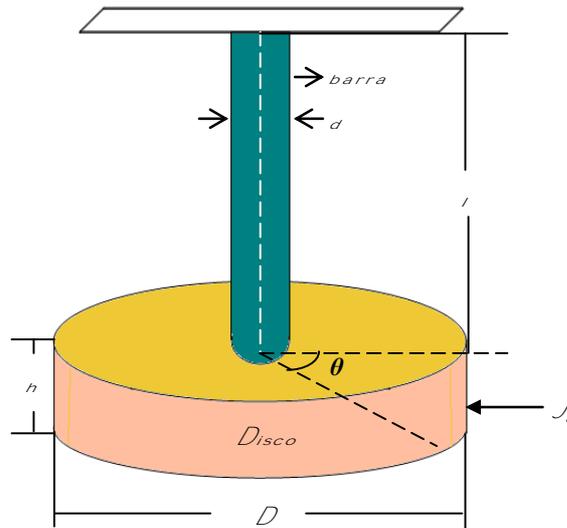
Para el cálculo de " $I$ " se ha supuesto que el momento de inercia de las masas respecto a un eje perpendicular a ellas y que pase por su centro de gravedad, es despreciable frente al término " $m_a L_a^2$ ".

## 2.9 Vibración torsional

La Figura 2.8 muestra un disco que tiene un momento polar de inercia de masa  $I_0$ , montado en uno de los extremos de una flecha cilíndrica sólida que está fija en el otro extremo. Si la rotación angular del disco sobre el eje es  $\theta$  (así como la torsión del eje),  $G$  es el módulo de cortante,  $l$  es el largo del eje y,  $\tau$  es el torque que produce la torsión  $\theta$ .

Se tiene de la teoría de torsión de ejes circulares que:

$$\tau = \frac{GI_0}{l} \theta \quad (2.16)$$



**Figura 2.8** Péndulo de Torsión.

**Fuente:** «Vibration and Shock Handbook» por Tylor & Francis Group, LLC, 2005.

donde:

$$I_o = \frac{\pi d^4}{32} \quad (2.17)$$

El eje provee un torque de retorno de magnitud. De esta manera el eje actúa como resorte torsional con una constante de rigidez torsional ( $k_t$ ):

$$k_t = \frac{GI_o}{l} \quad (2.18)$$

Derivando la ecuación del movimiento angular del disco sobre su eje y usando la segunda ley de movimiento de Newton se obtiene:

$$J_o \ddot{\theta} + k_t \theta = 0 \quad (2.19)$$

La frecuencia natural del sistema es:

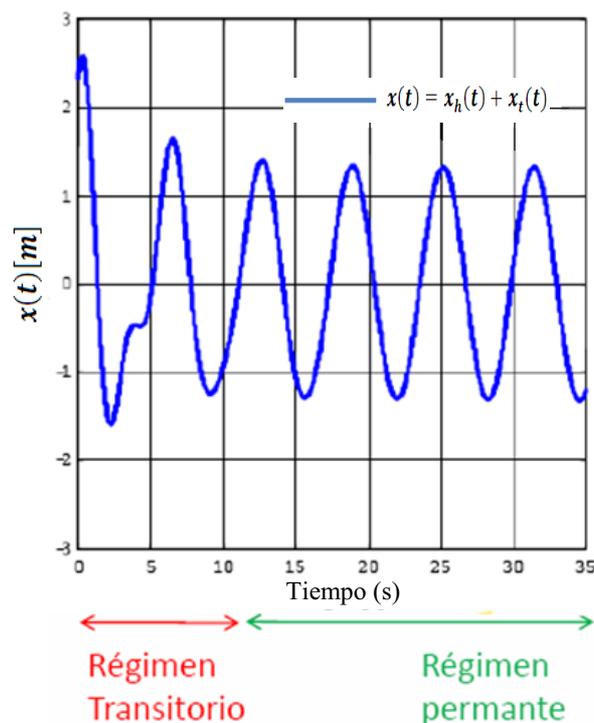
$$w_n = \sqrt{\frac{k_t}{J_o}} \quad (2.20)$$

## 2.10 Vibración forzada

La respuesta *forzada*, ocurre cuando dicho sistema oscila debido a la acción de fuerzas externas que lo excitan.

Cuando la excitación es de tipo oscilatorio, el sistema tiende a vibrar de la misma manera y con la misma frecuencia, es decir, que la respuesta del sistema estará en función de la frecuencia de excitación.

Una característica fundamental de los sistemas excitados por fuerzas externas es que su respuesta está conformada por un estado *transitorio* y un estado *permanente* (ver Figura 2.9). El *transitorio* se debe a la acción conjunta de la respuesta libre y la respuesta forzada, pero debido a que la respuesta libre es decreciente en el tiempo, después de alcanzado un cierto tiempo la respuesta del sistema estará únicamente dada en función de la respuesta forzada.



**Figura 2.9** Respuesta forzada estado transitorio y permanente.

Existen diversos tipos de excitación como lo son:

- Periódicas
  - Armónica simple (desbalance, desalineación, soldadura, entre otros)
  - Armónicas complejas (vibraciones acústicas, flujo pulsante, entre otros)
- No periódicas
  - Transitorias (arranque o parada de un equipo, pérdida de un alabe)

- Impulsivas (válvula de alivio, golpe de ariete, choques, flujo tapón, entre otros)
- Excitaciones aleatorias
  - Estacionarias (estadística no-tiempo)
  - No estacionarias (ola, viento, sismos, volcán)(estadística depende del tiempo)

Además de las definiciones dadas para los sistemas vibrantes sin excitación externa (libres), en los sistemas forzados se hace necesario definir otras variables para el análisis de los mismos.

La *amplitud de vibración forzada* se designa con el símbolo " $X$ " y es la amplitud de la respuesta forzada.

$$X = \frac{F_0}{m \cdot \omega_n} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (2.21)$$

La *relación de frecuencias* asocia la frecuencia natural del sistema con la frecuencia de excitación. Se designa con el símbolo " $r$ " es adimensional y se expresa según la ecuación:

$$r = \frac{\Omega}{\omega_n} \quad (2.22)$$

Donde " $\Omega$ " es la frecuencia de excitación. Un sistema de 1 GDL entra en resonancia cuando  $r = 1$ .

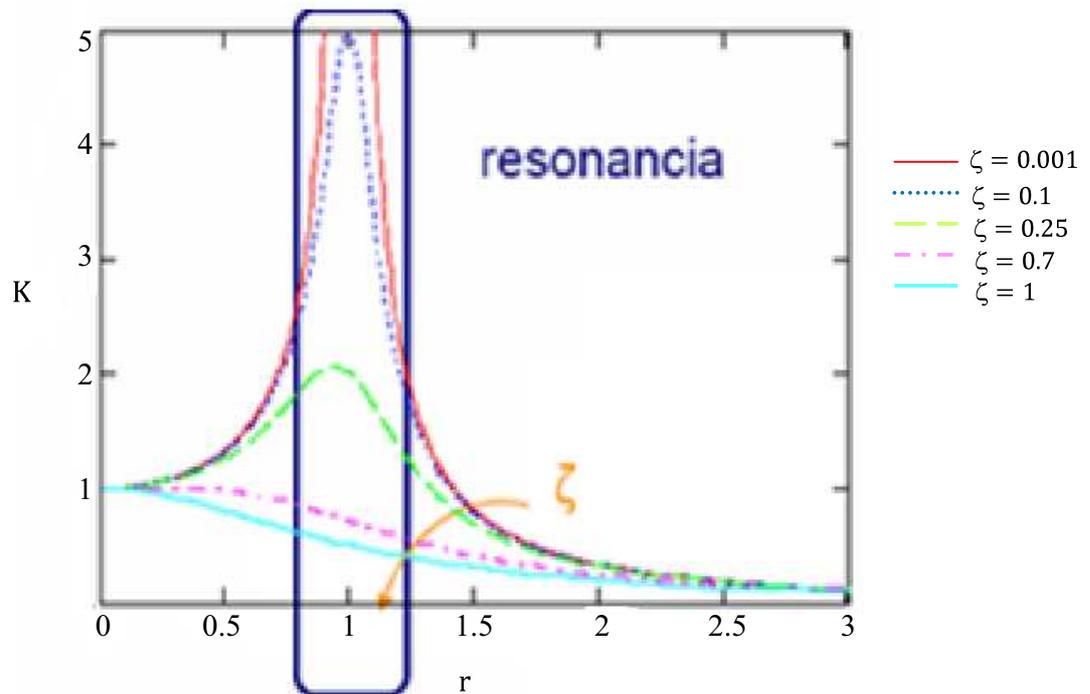
El *factor de amplificación dinámico* se designa con el símbolo " $K$ ", es adimensional y puede ser interpretado como el cociente de la amplitud de la respuesta forzada y la amplitud de la frecuencia de excitación. Se expresa por:

$$K = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (2.23)$$

El *retraso de fase* se designa con el símbolo " $\varphi$ " y se expresa en grados o radianes. Se expresa según la ecuación:

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{2\zeta r}{1-r^2} \right) \quad (2.24)$$

En el estudio de vibraciones forzadas son muy útiles los gráficos de factor de amplificación dinámico y retraso de fase vs. relación de frecuencias., ver Figura 2.10 y Figura 2.11.



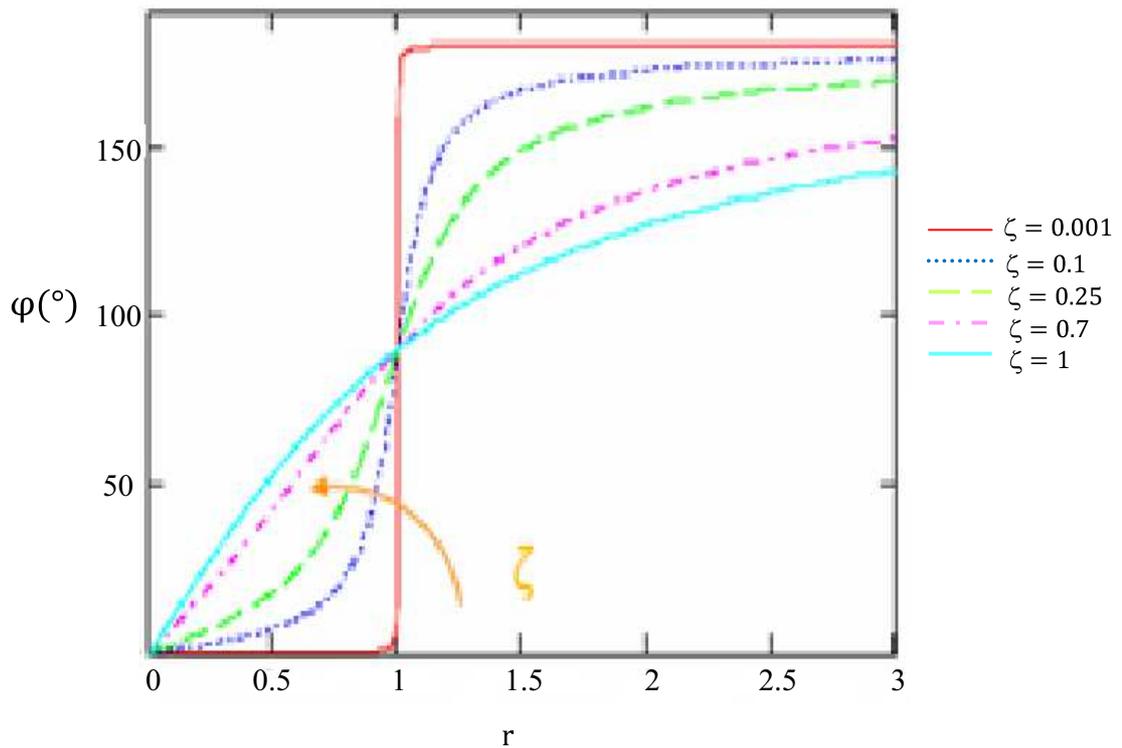
**Figura 2.10** Factor de amplificación vs relación de frecuencias para diferentes constantes de amortiguación.

### 2.11 Sistemas desbalanceados

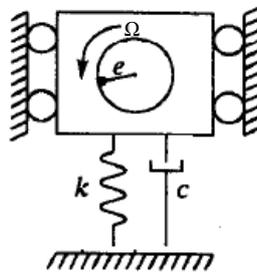
Con respecto a la excitación, los *sistemas desbalanceados* representan una excitación de tipo oscilatorio, la cual depende del momento de desbalance ( $m.e$ ) y de la frecuencia de la excitación ( $\Omega$ ), un esquema del sistema con desbalance se puede observar en la Figura 2.12.

Para este sistema, la ecuación de movimiento es:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{\mathbf{x}}(t) + \omega_n^2\mathbf{x}(t) = \frac{m}{M}\mathbf{e}\Omega^2\mathbf{Sen}(\Omega t) \quad (2.24)$$



**Figura 2.11** Retraso de fase vs. relación de frecuencias para diferentes constantes de amortiguación



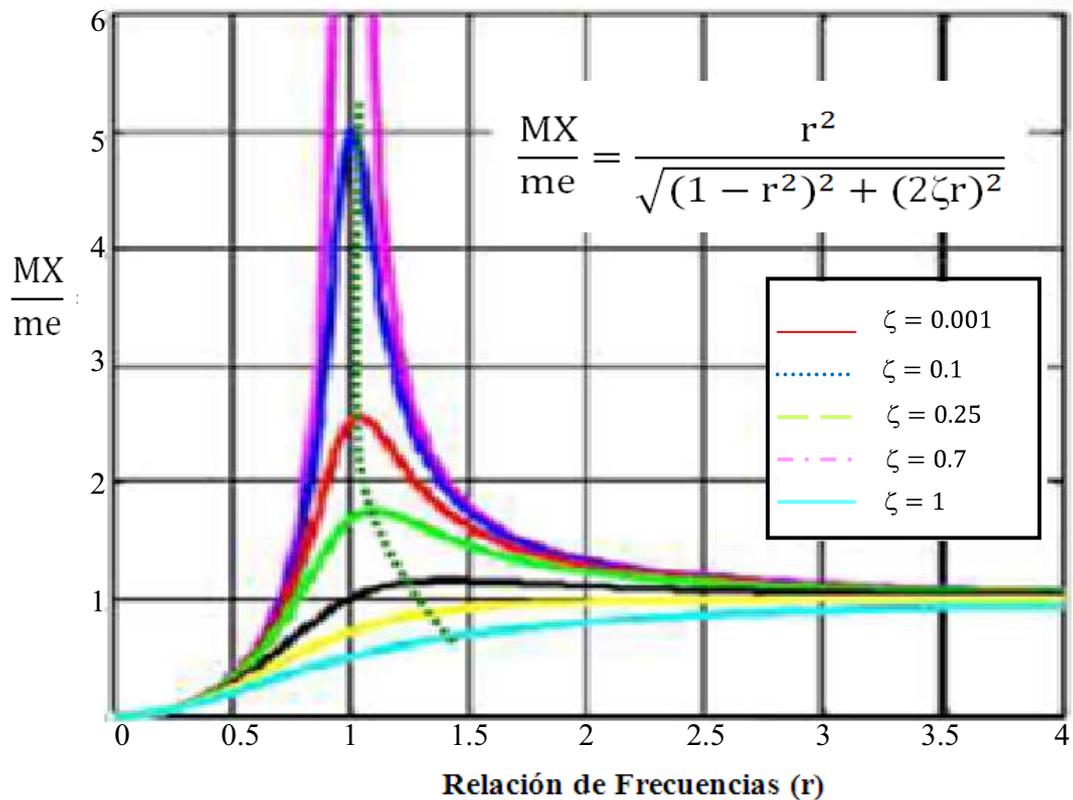
**Figura 2.12** Sistema desbalanceado producto de una excitación armónica simple.

**Fuente:** «Fundamentals of Mechanical Vibrations» por S. Graham Kelly, 2000.

Debido a la dependencia de la excitación con el desbalance el factor de amplificación de desbalance:

$$\Lambda = \frac{MX}{me} \quad (2.25)$$

Para el caso de sistemas que presentan desbalance, es útil graficar  $r^2 K$  vs.  $r$  debido a que la excitación depende de la frecuencia de operación del sistema, (ver Figura 2.13).



**Figura 2.13** Comportamiento de un sistema desbalanceado

### *Transmisibilidad*

La relación de transmisibilidad ( $f_t / f_o$ ) es definida como la cantidad de fuerza que se aplica a la masa y se transmite a los apoyos, o la amplitud de desplazamiento absoluto de la masa al desplazamiento de la base ( $X/Z$ ), (ver Figura 2.14).

### **2.12 Instrumentación**

Cuando se desea obtener información acerca del comportamiento de máquinas vibratorias, los transductores más comúnmente utilizados son los de proximidad, los vibrómetros y los acelerómetros.

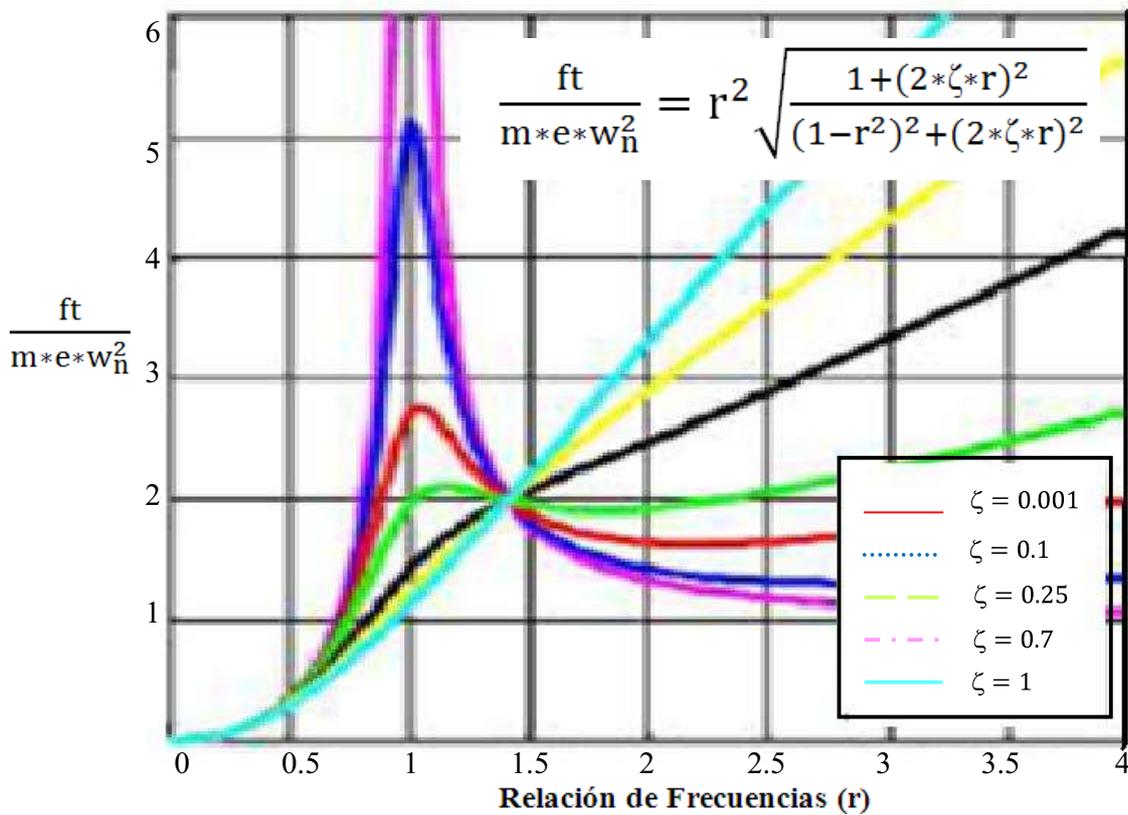


Figura 2.14 Transmisibilidad

### Transductor

El transductor de proximidad funciona generando un campo electromagnético. Cuando un cuerpo metálico se acerca o se aleja de él, se modifica la magnitud del campo magnético proporcionalmente a la distancia que existe entre la punta del sensor y el cuerpo metálico. Luego, el sensor entrega una señal eléctrica cuyo voltaje es proporcional a la magnitud del campo magnético. La Figura 2.15 muestra un transductor de proximidad.



Figura 2.15 Transductor de proximidad.

Cabe destacar que estos instrumentos no son capaces de detectar cambios en el campo magnético cuando las distancias superan el valor de referencia de saturación del instrumento.

### *Vibrómetro*

Los vibrómetros miden velocidades de vibración y están conformados por una masa magnética colocada sobre un resorte y rodeada por una bobina. El voltaje generado por el movimiento de la masa dentro de la bobina es proporcional a la velocidad de la superficie en la cual es montado el instrumento. Integrando esta señal, puede obtenerse el desplazamiento, (ver Figura 2.16).



**Figura 2.16** Vibrómetro

### *Acelerómetro*

El acelerómetro es uno de los transductores más versátiles, siendo el más común el piezoeléctrico por compresión. Este se basa en que, cuando se comprime un retículo cristalino piezoeléctrico, se produce una carga eléctrica proporcional a la fuerza aplicada.

Los elementos piezoeléctricos están hechos normalmente de circonato de plomo. Los elementos piezoeléctricos se encuentran comprimidos por una masa, sujeta al otro lado por un muelle y todo el conjunto dentro de una caja metálica. Cuando el conjunto es sometido a vibración, el disco piezoeléctrico se ve sometido a una fuerza variable, proporcional a la aceleración de la masa. Debido al efecto piezoeléctrico se desarrolla un potencial variable que será proporcional a la aceleración. Dicho potencial variable se puede registrar sobre un osciloscopio o voltímetro(ver Figura 2.17).



**Figura 2.17** Acelerómetro