MAYO 15, 1935 PHYSICAL REVIEW VOLUMEN 47

¿Puede Considerarse Completa la Descripción Mecánico-Cuántica de la Realidad Física?

A. EINSTEIN, B. PODOLSKY Y N. ROSEN, *Instituto de Estudios Avanzados, Princeton, Nueva Jersey*

(Recibido el 25 de Marzo de 1935)

En una teoría completa hay un elemento correspondiente a cada elemento de la realidad. Una condición suficiente para la realidad de una cantidad física es la posibilidad de predecirla con certeza sin perturbar el sistema. En mecánica cuántica, en el caso de dos cantidades físicas descritas por operadores que no conmutan, el conocimiento de una excluye el conocimiento de la otra. Entonces (1) la descripción de la realidad dada por la función de onda en la mecánica cuántica no es completa o (2) estas dos cantidades no pueden tener una realidad simultánea. La consideración del problema de hacer predicciones concernientes a un sistema sobre la base de mediciones realizadas sobre otro sistema que ha interactuado previamente con él nos conduce a la conclusión de que si (1) es falso, entonces (2) también lo es. Se llega así a la conclusión de que la descripción de la realidad dada por una función de onda no es completa.

1.

CUALQUIER consideración seria de una teoría física debe tener en cuenta la distinción entre la realidad objetiva, que es independiente de cualquier teoría, y los conceptos físicos con los que opera la teoría. Estos conceptos pretenden corresponderse con la realidad objetiva, y por medio de estos conceptos presentamos esta realidad a nosotros mismos.

Al intentar juzgar el éxito de una teoría física, podemos hacernos dos preguntas: (1) "¿Es la teoría correcta?" y (2) "¿Es completa la descripción dada por la teoría?". Sólo en el caso en que se puedan dar respuestas positivas a estas dos preguntas, se puede decir que los conceptos de la teoría son satisfactorios. La corrección de la teoría se juzga por el grado de concordancia entre las conclusiones de la teoría y la experiencia humana. Esta experiencia, que es la única que nos permite hacer inferencias sobre la realidad, toma en la física la forma de experimentos y mediciones. Es la segunda pregunta la que queremos considerar aquí, pero aplicada a la mecánica cuántica.

Cualquiera que sea el significado asignado al término *completo*, para una teoría completa parece ser necesario el siguiente requisito: *cada elemento de la realidad física debe tener una contrapartida en la teoría física*. A esto lo llamaremos: *la condición de completitud*. Por lo tanto, la segunda pregunta es fácilmente contestada, en cuanto seamos capaces de decidir cuáles son los elementos de la realidad física.

Los elementos de la realidad física no pueden determinarse mediante consideraciones filosóficas *a priori*, sino que deben encontrarse apelando a los resultados de experimentos y mediciones. Sin embargo, una definición exhaustiva de la realidad es innecesaria para nuestro propósito. Nos conformaremos con el siguiente criterio, que consideramos razonable: *Si, sin perturbar de ningún modo un sistema, podemos predecir con certeza (es decir, con probabilidad igual a la unidad) el valor de una cantidad física, entonces existe un elemento de realidad física correspondiente a esta cantidad física*. Nos parece que este criterio, si bien está lejos de agotar todas las formas posibles de reconocer la realidad física, al menos nos proporciona una de ellas, siempre que se den las condiciones en él establecidas. Considerado no como una condición necesaria, sino simplemente como una condición suficiente de la realidad, este criterio está de acuerdo tanto con las ideas clásicas como con las de la mecánica cuántica de la realidad.

Para ilustrar las ideas involucradas, consideremos la descripción mecánico-cuántica del comportamiento de una partícula que tiene un solo grado de libertad. El concepto fundamental de la teoría es el de concepto de *estado*, que se supone completamente caracterizado por la función de onda ψ, que es una función de las variables elegidas para describir el comportamiento de la partícula. Correspondientemente para cada cantidad físicamente observable A existe un operador, que puede ser designado por la misma letra.

Si ψ es una eigenfunción del operador A, es decir, si

$$\psi' \equiv A\psi = a\psi, \tag{1}$$

donde a es un número, entonces la cantidad física A tiene con certeza el valor a siempre que la partícula esté en el estado dado por ψ. De acuerdo con nuestro criterio de realidad, para una partícula en el estado dado por ψ, para la cual se cumple la Ec. (1), existe un elemento de realidad física correspondiente a la cantidad física A. Pongamos, por ejemplo,

$$\psi = e^{(2\pi i/h)p_0 x}, \tag{2}$$

donde h es la constante de Planck, p_0 es un número constante y x la variable independiente. Dado que el operador correspondiente al *momentum* de la partícula es

$$p = (h/2\pi i)\,\partial/\partial x\,, \tag{3}$$

obtenemos

$$\psi' = p\psi = (h/2\pi i)\,\partial\psi\big/\partial x \; = p_0\psi. \tag{4}$$

Así, en el estado dado por la Ec. (2), el *momentum* tiene ciertamente el valor p_0. Por tanto, tiene sentido decir que el *momentum* de la partícula en el estado dado por la Ec. (2) es real.

Por otra parte, si la Ec. (1) no se cumple, ya no podemos hablar de que la cantidad física A tenga un valor concreto. Este es el caso, por ejemplo, con la *coordenada* de la partícula. El operador correspondiente para ello, digamos q, es un operador de multiplicación para la variable independiente. De este modo,

$$q\psi = x\psi \neq a\psi. \tag{5}$$

De acuerdo con la mecánica cuántica, solo podemos decir que la probabilidad relativa para que una medición de la coordenada entregue un resultado situado entre a y b es

$$P(a,b) = \int_a^b \overline{\psi}\psi\,dx = \int_a^b dx = b - a. \tag{6}$$

Como esta probabilidad es independiente de a, pero depende sólo de una diferencia de $b - a$, se observa que todos los valores de la coordenada son igualmente probables.

Por lo tanto, no es predecible un valor definido de la coordenada, para una partícula en el estado dado por la Ec. (2), pero puede ser obtenido sólo a través de una medición directa. Sin embargo, tal medición perturba a la partícula y, por lo tanto, altera su estado. Después de determinar la coordenada, la partícula ya no estará en el estado dado por la Ec. (2). La conclusión habitual de esto en la mecánica cuántica es que: *cuando se conoce el momentum de una partícula, su coordenada no tiene realidad física*.

De forma más general, en mecánica cuántica se muestra que, si los operadores correspondientes a dos cantidades físicas, digamos A y B, no conmutan, es decir, si $AB \neq BA$, entonces el conocimiento preciso de uno de ellos excluye dicho conocimiento del otro. Además, cualquier intento de determinar este último experimentalmente alterará el estado del sistema de tal manera que destruirá el conocimiento del primero.

De esto se deduce que, o bien: (1) *la descripción mecánico-cuántica de la realidad dada por la función de onda no es completa*, o bien: (2) *cuando los operadores correspondientes a dos cantidades físicas no conmutan, las dos cantidades no pueden tener una realidad simultánea*. Porque si ambos tuvieran realidad simultánea —y por lo tanto valores definidos— estos valores entrarían en la descripción completa, según la condición de completitud. Entonces, si la función de onda proporcionara tal descripción completa de la realidad, contendría estos valores; estos serían entonces predecibles. Al no ser este el caso, nos quedamos con las alternativas expuestas.

En mecánica cuántica usualmente se asume que la función de onda contiene una descripción completa de la realidad física del sistema en el estado al que corresponde. A primera vista, esta suposición es completamente razonable, ya que la información que se puede obtener de una función de onda parece corresponder exactamente a lo que se puede medir sin alterar el estado del sistema. Sin embargo, mostraremos que esta suposición, junto con el criterio de realidad dado anteriormente, conduce a una contradicción.

2.

Para ello, supongamos que tenemos dos sistemas, **I** y **II**, a los que permitimos interactuar desde el tiempo $t = 0$ hasta el $t = T$, después del cual suponemos que ya no hay interacción entre las dos partes. Suponemos además que se conocían los estados de los dos sistemas antes de $t = 0$. Entonces podemos calcular con la ayuda de la ecuación de Schrödinger el estado del sistema combinado $\mathbf{I} + \mathbf{II}$ en cualquier tiempo posterior; en particular, para cualquier $t > T$. Designemos la función de onda correspondiente por Ψ. Sin embargo, no podemos calcular el estado en el que queda cada uno de los dos sistemas después de la interacción. Esto, de acuerdo con la mecánica cuántica, sólo puede hacerse con la ayuda de nuevas mediciones, mediante un proceso conocido como *reducción del paquete de ondas*. Vamos a considerar lo esencial de este proceso.

Sean $a_1, a_2, a_3, \cdots$ los eigenvalores de alguna cantidad física A perteneciente al sistema **I** y $u_1(x_1)$, $u_2(x_1)$, $u_3(x_1)$, $\cdots$ las eigenfunciones correspondientes, donde x_1 representa las variables utilizadas para describir el primer sistema. Entonces Ψ, considerado como una función de x_1, se puede expresar como

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2)\, u_n(x_1), \tag{7}$$

donde x_2 representa las variables utilizadas para describir el segundo sistema. Aquí $\psi_n(x_2)$ deben considerarse simplemente como los coeficientes de la expansión de Ψ en una serie de funciones ortogonales $u_n(x_1)$. Supongamos ahora que se mide la cantidad A y se encuentra que tiene el valor a_k. Entonces se concluye que después de la medición el primer sistema queda en el estado dado por la función de onda $u_k(x_1)$, y que el segundo sistema queda en el estado dado por la función de onda $\psi_k(x_2)$. Este es el proceso de reducción del paquete de ondas; el paquete de ondas dado por la serie infinita (7) se reduce a un solo término $\psi_k(x_2)u_k(x_1)$.

El conjunto de funciones $u_n(x_1)$ está determinado por la elección de la cantidad física A. Si, en lugar de esta, hubiéramos elegido otra cantidad, digamos B, que tiene los eigenvalores b_1, b_2, b_3, $\cdots$ y las eigenfunciones $v_1(x_1)$, $v_2(x_1)$, $v_3(x_1)$, $\cdots$ deberíamos haber obtenido, en lugar de la Ec. (7), la expansión

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(x_2) v_s(x_1), \tag{8}$$

donde los φ_s son los nuevos coeficientes. Si ahora se mide la cantidad B y se encuentra que tiene el valor b_r, concluimos que después de la medición el primer sistema queda en el estado dado por $v_r(x_1)$ y el segundo sistema queda en el estado dado por $\varphi_r(x_2)$.

Vemos por tanto que, como consecuencia de dos mediciones diferentes realizadas sobre el primer sistema, el segundo sistema puede quedar en estados con dos funciones de onda diferentes. Por otra parte, dado que en el instante de la medición los dos sistemas ya no interactúan, no se puede producir ningún cambio real en el segundo sistema como consecuencia de cualquier cosa que se haga en el primer sistema. Por supuesto, esto es simplemente una declaración de lo que significa la ausencia de una interacción entre los dos sistemas. Así, *es posible asignar dos funciones de onda diferentes* (en nuestro ejemplo ψ_k y φ_r) *a la misma realidad* (del segundo sistema después de la interacción con el primero).

Ahora bien, puede suceder que las dos funciones de onda, ψ_k y φ_r, sean eigenfunciones de dos operadores no conmutables correspondientes a algunas cantidades físicas P y Q, respectivamente. La mejor manera de mostrar que este puede ser realmente el caso es con un ejemplo. Supongamos que los dos sistemas son dos partículas, y que

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x_1 - x_2 + x_0)p}\, dp, \tag{9}$$

donde x_0 es una constante. Sea A el *momentum* de la primera partícula; entonces, como hemos visto en la Ec. (4), sus eigenfunciones serán

$$u_p(x_1) = e^{(2\pi i/h)p\, x_1} \tag{10}$$

para el correspondiente eigenvalor p. Como tenemos aquí el caso de un espectro continuo, la Ec. (7) ahora se escribirá

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p(x_2) u_p(x_1) dp, \qquad (11)$$

dónde

$$\psi_p(x_2) = e^{-(2\pi i/h)(x_2 - x_0)p}. \qquad (12)$$

Sin embargo, este ψ_p es la eigenfunción del operador

$$P = (h/2\pi i)\, \partial\big/\partial x_2\ , \qquad (13)$$

para el correspondiente eigenvalor $-p$ del *momentum* de la segunda partícula. Por otra parte, si B es la coordenada de la primera partícula, tiene las eigenfunciones

$$v_x(x_1) = \delta(x_1 - x), \qquad (14)$$

para el correspondiente eigenvalor x, en donde $\delta(x_1 - x)$ es la conocida función delta de Dirac. La Ec. (8) en este caso se convierte en

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(x_2) v_x(x_1) dx, \qquad (15)$$

dónde

$$\varphi_x(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x - x_2 + x_0)p} dp$$
$$= h\delta(x - x_2 + x_0). \qquad (16)$$

Este φ_x, sin embargo, es la eigenfunción del operador

$$Q = x_2 \qquad (17)$$

para el correspondiente eigenvalor $x + x_0$ de la coordenada de la segunda partícula. Ya que

$$PQ - QP = h/2\pi i, \qquad (18)$$

hemos demostrado que esto es, en general, posible para ψ_k y φ_r, que sean eigenfunciones de dos operadores que no conmutan correspondientes a cantidades físicas.

Volviendo ahora al caso general contemplado en las Ecs. (7) y (8), asumimos que ψ_k y φ_r son efectivamente eigenfunciones de algunos operadores que no conmutan P y Q, correspondientes a los eigenvalores p_k y q_r, respectivamente. Por lo tanto, midiendo A o B estamos en condiciones de predecir con certeza, y sin perturbar de ningún modo el segundo sistema, ya sea el valor de la cantidad P (es decir, p_k) o el valor de la cantidad Q (es decir, q_r). De acuerdo con nuestro criterio de realidad, en el primer caso debemos considerar la cantidad P como si fuera un elemento de la realidad, en el segundo caso la cantidad Q es un elemento de la realidad. Pero, como hemos visto, ambas funciones de onda ψ_k y φ_R pertenecen a la misma realidad.

Previamente demostramos que, o bien: (1) *la descripción mecánico-cuántica de la realidad dada por la función de onda no es completa*, o bien (2) *cuando los operadores correspondientes a dos cantidades físicas no conmutan, las dos cantidades no pueden tener una realidad simultánea*. Partiendo entonces de la suposición de que la función de onda sí da una descripción completa de la realidad física, llegamos a la conclusión de que dos cantidades físicas, con operadores no conmutables, pueden tener realidad simultánea. De este modo, la negación de (1) conduce a la negación de la única otra alternativa (2). Por lo tanto, nos vemos obligados a concluir que la descripción mecánico-cuántica de la realidad física dada por las funciones de onda no es completa.

Esta conclusión se podría objetar sobre la base de que nuestro criterio de realidad no es suficientemente restrictivo. De hecho, no se podría llegar a nuestra conclusión si uno insistiese en que dos o más cantidades físicas pueden considerarse como elementos simultáneos de la realidad sólo cuando estos pueden medirse o predecirse simultáneamente. Desde este punto de vista, estas cantidades P y Q no son simultáneamente reales dado que, o bien uno o bien otro pero no los dos simultáneamente, pueden predecirse. Esto hace que la realidad de P y Q dependan del *proceso de medición* realizado en el primer sistema, el cual no perturba de ninguna forma al segundo sistema. En ninguna definición razonable de la realidad se podría esperar que suceda esto.

Si bien hemos demostrado que la función de onda no proporciona una descripción completa de la realidad física, dejamos abierta la cuestión de si tal descripción existe o no. Creemos, sin embargo, que tal teoría es posible.